対話的授業論のためのメモ 4
ランパートを読み直してみる–数学における unknown question について

宮崎清孝

0, きっかけ

ランパートとは著名な数学教育の研究者で，公式を覚えればいいとか正解を出すための手続きを学ぶというような学びではなく、学習者が知的に生産的なものとして数学を経験することのできる授業を作り出そうとする立場から研究をおこなっている(Lampert, 1990, Lampert & Blunk, 1998)。特筆すべきことは、彼女が小学校で，自分自身で授業をおこない、その結果を分析するという研究方法をとっていることだ。その研究は日本でもよく知られていて，日本語訳（抄訳だが）もある(秋田訳 1995)。私自身も読んでいて，それなりに評価していた。2009 年の本（『子どもの学び教師の学び』）でも、注においてだがこの Lampert(1990)を引用もしている。ただ、そこでは若干批判的に、というか違いに焦点を当てていた。

ところがこの 9 月に日本科学教育学会で，私の unknown question をめぐって「課題研究発表」（シンポのようなもの）がおこなわれて、そこで跡部将彦氏（青山学院大学院生）がランパートの論文を unknown question と関係づけて発表された（跡部 2014）。これがきっかけとなって、この論文を読み直してみたのだが，評価がだいぶ変わった。私たちなどの現在立つ，対話的な授業論に非常に近いところがあるのだ。ただし、理論的には私たちのものほど徹底していない。unknown question につながる発想も，明確にはなっていない。ところが、というべきか、ランパートが依って立っている数学観がある。数学・科学哲学者であるラカトシュ Lakatos(1922-1974)たちの考え方[1]なのだが，私のみるところではこのラカトシュの数学についての考え方の中に，unknown question につながる発想がある。数学といえば正しいか間違っているかどちらかで、何が正しいかは公理とそこからの論理展開に基づいて厳密に決定できる。誤りなのだがそこに可能性があり、別の問いがある，といった話は曖昧で、許されそうもない，といったイメージがある。だがどうやら、これが違うらしいのだ。とうわけで、ここではランパート(Lampert, 1990)を読み直し、さらにラカトシュ(1976, 佐々木訳 1980)をみることを通して，数学と数学教育における unknown question について考えてみる。

まず跡部氏の報告を予稿集のための論文からみよう（跡部,2014）。ただし当日の報告では、氏の内容は大幅に、また私にとってより賛成できる立場に変わっている。ただそれを明確な形では記述できないので，あくまでも彼にとっても古い立場からのものなのだが、ということを述べた上で，予稿集の論文を用いる。氏の論点はおおざっぱにいうと

・教師も知らない unknown question は数学では設定するのが困難。
・だが，unknown question と似た性質の問いを学習者である子どもたちが持つことは可能。
・したがって教師が真に知らない問いについての本当の意味での探究の授業は困難だが，教師が知

[1]、ラカトシュの考え方を数学教育に用いようとする研究者はランパートだけではなく、数多くいるようである。ちょっと調べただけでも Morley(1970)、また日本でも小松(2011)等多くあがる。ここではラカトシュに基づく数学教育観として何が好ましいのか、という問題を取り扱うわけではなく、あくまでもランパートを通して見えてくる unknown question との関係を取り扱うので、これらについては一々触れることはしない。

らないふりをする「探究のロールプレイ」はできるし、それに意味はある，

　ということになろう。ここで教師も知らない unknown question が数学ではなぜ設定困難かというと，

・数学の知識は一般性が高く非実証的（論理で決まるので、実証的な事実で決まるのではない）ために、総合学習におけるように，科学的な，それ自体としては既に知られている法則が，「この場ではどうだろう」という形で unknown question になる、という事態にはならない。
・教えるべき既存の内容があり、それを答えとする問いは教師にとって unknown というわけではない。
・数学の場合、教師にとっての unknown と子どもにとっての unknown の間に大きな断絶があることが予想される。

跡部氏のこのような評価は私からみてもそれなりに理解できるものだ。というのも、氏の unknown question についての知識は，当然ながら宮崎(2005,2009)に主として基づいている。そこでは unknown question とは、科学の世界でもまだ解明が不十分であることであったり（典型として、「店って何だろう」における「自販機は店か」問題）、また上にも出ているように法則性としては知られているが、それが「今、ここでどうか（法則どおりになるか？）」はわからない」（典型として、アカネズミが、クルミの木の多いこの五軒小の庭にいるか？）ものとして理解されていた。一方今の私たちは、子どもの誤りの中に，教師が気付かなかった違う問いがある，という意味でも unknown question はあると理解している。
　というわけで、このように unknown question を拡大して理解している今の私たちにとっては、数学にも unknown question があり得るのではないかと考えてみたくなる。それで、跡部氏が分析対象としたランパート論文をもう一度読んでみよう、ということになったわけだ。

１，ランパートの数学観

　というわけで Lampert(1990,秋田抄訳 1995)を読んでいくが，その論文のはじめのところで、彼女はまず彼女の数学観を述べている。なお以下ランパートの紹介にあたって、英語の翻訳は基本宮崎のものだ。
　それを彼女は、学校でよくある数学についての見方と対比する。彼女によると，よくある見方では、数学は確実性と結びついている。数学をやるとは、教師にルール（公式，解法，証明の技法）を教えられて覚え、出された問いにそれを応用することだ。そこでは教師、教科書が正解を知っている。数学は、創造されたり探索されたりするものではなく、真理とは与えられるものだ、という。
　これに対して、彼女は上にも述べたラカトシュや、『いかにして問題を解くか』で日本でも著名な数学者ポリア Polya（1976,佐々木訳 1980）に基づいた考えを対置する。
　ラカトシュによると、定理とか公式とかいった数学的な活動の生産物は，公理からの演繹的な証明によって正当化されるだろうが、その演繹的な証明と、私たちがそれを知る，作るという過程は、同じではない。彼によれば数学は、量や形の中にある関係性についての“意識的な推論 conscious guessing”の過程として発展するもので、それはある（定理や公式についての最初の）推測 conjecture から始まって，反証の使用やら“論駁”によって前提としての公理を検討するにいたる“ジグザグ”の道筋を通る証明によっておこなわれるものだ。数学的に知るとは、証明があったとしても、決して最終的な，あるいは確実なものではない。というのも、数学者が公理と呼ぶ証明の前提が，数学者

の談話のコミュニティの中では耐えず再検討へと開かれているからだ。

さらに、ラカトシュは数学は変化し、成長してきたという。それは公理から定理などを導出する論理が間違っていたことが分かったからではなく、証明のための論理が基づいている公理や前提が改訂(revision)されていくからだ。そしてその改訂の必要性は、人が実際に証明を開始してみて，自分が前提としたものの欠陥を発見して、始めて明らかになる。反例を発見して，自分の最初に立てた推定が論駁されて、はじめて前提の改訂が示唆されるという。

ラカトシュの考えについては、後でもう一度、私自身の目で見たものを紹介するつもりだ。だがそれにしても、このままだとわかりにくい。少し私の言葉で説明してみよう。

まずここで、推測とは、きちんと証明されれば定理とか公式とかになっていくものだ。ところでできあがった数学の体系の中では、定理とか公式は確実なものとしての出発点である公理から，論理を追うことで作り上げられる、あるいは証明されるものだ。だが、これは結果としての数学の体系についていえることであって、数学者たちのコミュニティの中でのやり取りを通して数学が作られていくときには、このような一本道の道筋を通るわけではない。ある推測、つまりある定理や公式についての最初の予想から始めて、それを具体的に試してみて、最初の推定に対して反証が得られたり、それが論駁されたりすると，それで定理やら公式の予想が間違いとして捨てられるのではなく、前提とされていた公理自体が再検討され、変えられ、そしてまたそこから、少し変わった形での定理や公式が作られ、試されていく。実際にある定理や公式が作られ、知られるようになるのは、このように実際での反証論駁と，前提である公理を変えていくという、失敗したり、修正したりのジグザクの過程なのだ。

なおここで、ランパートが「数学の談話のコミュニティ」という言葉を使うのは、数学を作っていく過程が一人の頭の中でではなく、数学についての知識、すなわち文化を共有する数学者たちが，論争したり、対立したりする中で，つまり数学者の共同体（コミュニティ）の中のやり取りの中で生じていく、と考えているからだ。そこで「談話」という言葉が使われるのは、このやり取りが言葉によるやり取りであり，そこで数学についての知が変わっていくとは、数学についての、あるいはその中の個々の知識が、数学的な記号も含まれた言葉、その語り方によって担われているとランパートが捉えていることを示している。（後で述べることを先取りすることになるが、数学を学ぶとは、数学者のコミュニティの中に存在する文化を獲得していくことであり，文化が言葉によって担われているかぎりで、ある語り方（談話の仕方）を自分のものにしていくことなのだ。）

ここでまた、ランパートに戻る。ランパートがラカトシュやポリアの紹介の中で特に強調するのは、数学をここで見てきたような形でやるときには「勇気」と「謙譲」が必要だとしているところだ。たとえばラカトシュによれば、このように数学をすることが論理的な一本道をたどることではなく、論駁や改訂がおこなわれるジグザグの道をたどることだとすると、この“意識的推論”をおこなうとは間違いをしてしまうかもしれないリスクを負う活動である。そのようなものとしての“意識的推論”をおこなうためには、勇気と謙譲が必要になるのだという。ポリアも似たことをいう。

ポリア（1976）によると、数学をおこなう人間は“帰納的な態度”を取る必要がある。ラカトシュがジグザグといったのと似たような形で，＜観察＞と＜一般化＞の双方を，つねに問うていることが必要である。なおここで、＜観察＞とは、ラカトシュの場合でいえば反証を見つけること、あるいはそのために具体的な例にあたってみることを指し、一般化とは最初の推測をたてたり，定理や公式としてそれを修正し、作り上げていくことを指す。そしてポリアにとってそれをおこなうために必要なのは、一つには私たちの信念をいつでも改訂できる「知的勇気」であり，変えるべきよき理由があるときには深淵を変えなければならないという「知的正直さ」であり，よき理由なしに、真剣な検討なしに、信念を勝手に変えてはならないという「賢明な自制」であるという。

ここまでをまとめてみよう。ランパートにとって数学とは、前提となる公理と具体的な事例との間をいったりきたりしながらのジグザグの過程で変化し、発展していくものだ。数学者たちはそのコミュニティの中で，そんな文化を持ち、数学を作り出す。そこでは論駁やら反証やらが重要なので、それをおこない、受け入れる勇気や謙譲な精神が必要だ。

2,ランパートの数学教育観

このような数学観を持つランパートは数学教育をどのように考えるのか、みていこう。まず彼女にとって大事なのは、学習者が数学の個々の内容（contents）を学ぶことだけではなく、数学をおこなうとは何なのかを学ぶことである。上に述べたように、数学を単に公式を覚えたり公式を適用して答えを出す作業としてではなく、数学者が数学を作り出すときにやっているような、アイディアや議論の著者の位置に自分たちを置く活動、アイディアの正統性の根拠が教師や教科書ではなく，推論と数学的な議論であるような活動として、数学を学ぶことである(Lampert, 1990,p.34)。

学習者のこのような活動がそこでおこりうる教室の文化をつくるために必要なのは、学ぶこと、知ることについて教師と学生の役割と責任を決めていく「参加構造」を作り出すことだ。なおここでクラスの「参加構造」とは社会的な出来事への参加者の間での対人的な権利と義務の割り当て、つまりある社会で、その社会のメンバーの誰がどんなことができ、どんなことをしなくてはならないかを決めていくものだとされる。教師と学習者は知識とは何か、知識を獲得するにいたる過程はどんなものか、ということについての定義を同意していく談話のコミュニティを形成していく。教師は社会的、知的な権威者として，教室内での行為や言葉がどのように解釈されるべきかについて学習者よりも権力を持っているが，でも解釈は最終的には学習者との交渉(negotiation)の結果なのだ。だから、数学を知るということについて新しい考え方を持つためには、教師と学習者はともに、これまでとは異なった種類の活動をおこない、これまでとは異なった種類の役割、責任の取り方をしなければならない(p.35)。

では教師はどうしたらいいのか。教師の責任は議論のための問題を選ぶことであり，学習者の責任は問題の世界(domain)の中でそれに対する興味、問い、理解を表していくことだ。教師が設定する問題と，学習者がそれに対して持ち込む数学（の知識）の交渉(negotiation)の結果、そこで論じられる論点が生まれてくる。

そこで使われるべき問題を，彼女は Kilpatrick(1987)の言葉を用いて“生産的思考を要する構造化された問題[2]“と呼ぶ。これはよく知られた解法(アルゴリズム)の単純な適用では解けないもので、その解決には多様な道筋があって、学習者にいろいろ考えさせることができるような問題だ。もっとも大事なのは、その問題が数学的な仮説を作らせ、検証させるようクラスのみんなを積極的に関わらせる(engage)というものであるべきということだ。ただし学習者が明確に仮説だと意識してなくてもいい。答えの中に学習者の仮説が存在していて、異なる答えを比較することがいろいろな仮説のそれぞれの善し悪しについて考えることとなる。それによって、学習者は上で述べたジグザグ，帰納的な観察と演繹的な一般化、つまり個別的な事例からしていくことと，抽象度の高い公式や命題から論理的に展開していく間をいったりきたりすることが可能になる(Lampert, 1990,p.39,40)[3]。

---

[2] これは Fredericken(1984)からの引用。そこでは問題を well-structured, structured problem requiring productive thinking, ill-structured の３つに分けている。まん中のものがここで焦点化されているわけだが、Kilpatrick によるとこれは問題解決者が解決手続き（の一部あるいは全部）を自分で作り出さなければならない問題である。

[3] なお、ランパート論文の翻訳への解説で、秋田はランパートの特徴の一つとして、「身近な問題は

だが問題を設定するだけが教師の仕事ではない。教師の大事な役割には、数学をここでいっているような意味でやるとはどういうことなのか、ということについて、学習者たちのモデルになる，ということがある。教師は教室の中では数学について最高のエキスパート（熟練者）だ。だからこの熟練を，それを獲得しようとしている学習者に示す能力がある。そのために教師は答えとか、答えを出すためのルール以上のことを知らなければならない。問題を証明してみせ、学習者たちの証明を評価できなければならない。だがそれだけではない。教師は，学習者たちが数学のさまざまな領域(terrain)を迷い歩き、彼らの主張を支持したり、挑戦したりするために適切なものとして証拠をかき集めてくるのを追い、見守らなければ（follow）し、彼らが他の学習者に対して同じことをしようとするのを支えなければならない。いや、それだけでなく、教師自身が柔軟な仕方で(flexible)数学の領域(territory)を動き回ることが、問題解決への一つのアプローチをモデルとして提供することになる。このとき教師は、ポロックという数学者が“クロスカントリー式数学“と呼んだものを実地教授しているのだという（Lampert, 1990,p. 41）。

ちなみに、“クロスカントリー式数学”は， ポロックが彼の教師だったビーグルという数学者からの学び方について述べたことで、きちんと道標がつけられた(well marked)道を行くのと対比されるが，それはきちんと準備され洗練された講義のようなものだ。それに対してクロスカントリーでは，荒れ果てた，不確かな土地を行かなければならない。教師がそういう土地を渡っていくことが，学習者自身が同じように渡っていくことを学ぶための鍵となる。つまり、教師自身が世界への一直線ではなく、ジグザグのやり方で数学をおこなうことが，学習者にとっていいモデルとなる、ということだ。

このような数学教育観を述べたところのまとめとして，彼女は教師として，数学を知るとは何を意味するか教えるに際し実際に授業でやったことを３つにまとめている。まず、どういう活動が適切であるか、不適切であるか、直接に伝えること。次に彼らにやれるようになってほしい活動のロール・モデルとなること。最後に，ダンス教師が学習者と共にダンスを踊るように，共に数学をやること。そこでは数学的な談話（語り方）のいろいろな決まり(convention)をみせただけではなく、数学的な語り方を共に再発明したという。

3、私たちの考えから見たら

このランパートの数学教育観は、対話的な授業論を展開しつつある今の私たちにとって、いくつかの重要な類似点、あるいは評価したい点を持っている。それについてここで見ていく。だがその前に一つ、私たちはあまり使わない考え方についてはっきりさせておこう。

それは、1 で数学観を述べたところでも使われていたが、ここでも使われている「談話」という考え方である。談話としての数学とか、数学で使われる談話を変える，という言い方がなされる。談話とは会話のように実際に使われているものとして言葉を捉えていくときに使われる用語であり，ここでは実際具体的に，「知る(know)」「考える(think)」「修正する(revise)」「説明する(explain)」「問題と答え(problem and answer)」といった言葉の学習者にとっての意味を、授業の中で変えていくことがめざされている。これは、この論文で「学ぶ」とか「考える」とかいう活動が社会的・文化的な活動であり，言葉によって担われ、伝えられていくと捉えられているということに基づい

出発点であり、そのなかで原理や手順の意味がわかっていく過程を通して、未知数にも当てはまる有効な理論としての数学の原理の意味や数学の意味の習得がはかられている」（秋田 1995, p.238）と述べている。これでは観察から演繹的な議論への一方向しか押さえられていないことになり、ジグザグに込められた意味が見逃されているようである。

ている。数学者のコミュニティの中での数学についての，あるいは数学の中でのさまざまなことについての語られ方の中に，数学的な考え方、学び方が存在していて、それは数学について学校の中で一般的に語られる仕方と違うものであり、だから数学者たちと同じように考え、学ぶようになるということは、数学についての，あるいは数学の中でのさまざまなことについての語り方を変えていくことになる。

さて、類似点である。まず一つは、授業を変えていくにあたり，教師による問題設定の重要性を抑えている点であり、またその問題の性格である。既に述べたように，その問題は“生産的思考を要する構造化された問題“とここでは呼ばれているが、正解へ一本道しかないのではなく、多様に考えることができ、そこに対立を作り出すことができる問題だということだろう。授業の中に対立、葛藤を作り出すことの重要性は斎藤教授学がつとに述べているところであり（斎藤 1970a, p.365）、ここに基本的な共通点があるといっていいだろう。

ただ私たちと違うのは、ランパートが、教師にとってこのような問題を発見する過程について注意を払っているように思えないことだ。これは、この種の問題を発見するための技法について考えていない、という批判ではない。この過程が授業の性格、ひいていえば学習者の授業における学習に深くかかわっている、という点の洞察が見られないということだ。これは、斎藤教授学でいう「教材解釈」論の問題である（斎藤 1970b,p.72）。斎藤によれば、教師のいわゆる教材研究とは「教師自身が一人の人間として、その教材と全人間的に対面し衝突すること」であり、ランパートのいうような“生産的思考を要する構造化された問題“を発見するためには，このような教師による，題材の本気の学習が必要と考えられる。この教材解釈の結果、「新しい疑問とか、思考とか、論理」が発見されていくのであり，私たちが授業の中で学習を推し進める問いを unknown question と特徴づけるのも，このような教師の、本気の学習過程が存在していると考えるからだ。ランパートによる”生産的思考を要する構造化された問題“の特徴付けは、それを生み出す教師の側の学習過程と関連づけられていないのだ。

のではあるだが、実はランパートが教師の側の学習過程について，まったく触れていないのではないどころか、触れていて、しかもその内容が私たちの考えと非常に近いものがあるので、話はややこしくなる。教師の学習過程が斎藤の教材解釈論に描かれたそれと非常に近いものでありながら、それと教師の設定する問題との関係は切れている。

この、教師の側の学習過程に関連する点が、ランパートの考えと私たちの考えが最も近くなるところだ。それは直接には学習過程の話ではなく、上にも書いたように教師の仕事の一つとして、教師が数学的な考え方のモデルになるべきだ、ということである。これは、宮崎(2005,2009)でいう、proto-learner 原学習者としての教師、という考えに非常に近いではないか。ちなみに宮崎(2009)では原学習者について、まず「教師の学び方がその教える子どもたちの学び方の原型、お手本になるもの」（宮崎 2009, p.214）と述べている。

だが実のところ、それだけでは今の私たちにとってたいしたことではない。大事なのは宮崎(2009)の次で述べているところ、「ある教材についての子どもの学びが知的に面白い問いに対する追求になるためには、まずは教師のその教材についての学びがやはり追求になっていなければならない」というところなのだ。そして、ランパートは実質的にそういっていると思われる。

それはランパートが「クロスカントリー式数学」について述べたところだ。学習者のモデルとなる教師の数学への取り組みは，柔軟な仕方で(flexible)数学の領域(territory)を動き回ることなのだが、その「領域」とは荒れ果てた，不確かな土地なのだ。そこは道しるべがあるわけではない。未知の土地で，迷い込んで失敗することもあるだろう。うまくいかず試行錯誤をしていくということだ。そういう試行錯誤が，つまり教師の学びであり、それが学習者にとってモデルとなるのだ。

このランパートの記述は、宮崎(2009)の後の方の記述と同じことをいっていることは明らかだ。もっとも、クロスカントリーという言葉には鮮やかなイメージ喚起力がある。そしてこの点についていうと、我々の仲間がやはり鮮やかなイメージを持つ表現で，教師と子どもの学びのあり方を描いている。宮崎(2005)の中の，綿引(2005)の言葉だ。自分の総合学習を報告する中で、彼は次のような言い方をしている。「本当に心弾むのは，新雪をふむがごとく、自分たちが思うがままに歩んだ足跡が、そのまま学びの道になっているような学習。」（宮崎 2005, p. 137）
ランパートに戻れば, クロスカントリー式数学とは未知の土地での試行錯誤による数学の学びだ。そしてそれを教師がまずやる。とすれば、ここで出くわす問題は，まさに unknown question ではないか。そしてこのクロスカントリー式数学とは、ランパートの別の、ラカトシュを援用した言葉でいえばジグザグを経験することなのだから，ジグザグを推し進めるのは、またジグザグの中でであうのは、unknown question ではないのか。だが、見たようにランパートはそこまでは踏み込んでいない。それはもしかしたら、ランパートの、ラカトシュの読み（の不足）に由来するのではないか。

4、ラカトシュの場合。

証明と論駁の方法
というわけで、ラカトシュの考えを見てみよう。ラカトシュの目指すところは,「非形式的・準経験的数学が議論の余地なく確立された定理の数的な単調増加によって成長するのではなく、思索と批判、証明と論駁による推量の不断の改良を経て成長する，という点を練り上げる」(ラカトシュ，1980,p.5)ことである。数学を、設定された公理群から論理に従って一本道で展開するものとして捉えるのではなく、批判や論駁を経て発展していくものとして、ということは批判され、論駁される誤りが重要な役割を果たしながら、発展していくものとして捉えている。数学についてはアプリオリな知識の典型として（塚本, 2002）、つまり論理のみにより絶対的に正誤が決まる知識として決まる見方が伝統的だが、それに対して数学も経験的知識に似ていて、だから推論や誤りが重要な役割を果たすとする。それが、彼が自分の考えを「準経験主義」と呼ぶ由縁だ。
「推量の不断の改良を経て成長」する仕方について、ラカトシュはいくつかの筋道をあげている。その中でラカトシュがもっとも力を入れているのは，はじめに「補題組み込み法」と呼ばれ(ラカトシュ，1980、p.40)，後で「証明と論駁の方法」と再命名される(同上、p.60)方法である。その筋道(同上、p.154)を，解説を交えつつ以下に紹介しよう。それは 4 つの段階からなる。

第 1 段階：原始的推測
原始的とは最初という意味であり、何らかの理由である命題が定理ではないかと推測される。ここから展開が始まる。
第 2 段階：証明（原始的推測を部分推測、つまり補題に分割するおおざっぱな思考実験もしくは議論）
命題はとりあえずは証明され、定理となる。ここで「補題」という言葉が出てくるが，その意味については後で具体例を用いて述べる。
第 3 段階：大局的反例（原始的推測への反例）の出現
大局という意味は後で述べる。定義だと“証明”された「原始的推測」に対し、それは正しくない、という事例、つまり反例が発見される。
私たちが持ちがちの、そしてランパートも教育場面でよくあると述べている数学観からすると、

反証が発見された時点でこれを定理としたことは誤りで，ここで話は終わることになる。だがそうはならないというのがラカトシュの考え方だ。
第 4 段階：証明再検討。大局的反例が「局所的」反例となるような「有罪補題」を見つける。この有罪補題は前には「隠れ」ていたか誤認されていた。今やこれが顕在化され、原始的推測の中に条件として組み込まれる。定理–改良された推測–は新しい証明生成概念を卓絶した新しい特徴として伴い原始的推測を乗り越える。
　局所的反例とは、補題、有罪補題という概念と密接に結びついている。これらについては後で触れる。今ごくおおざっぱにいっておくと、第 3 段階で発見された反例によって怪しくなった定理、すなわち原始的推測は、反例によって再検討され，その反例が反例でなくなる新しい定理へと作り直される。
　反例という具体物によって定理という普遍性を持った抽象的なレベルでの命題が作り直される。原理的にいえば、そうやって作り直された定理に対して、また反例が発見され、さらに新しく定理が作り直されることがあり得る。とりあえずは、上ででてきたジグザグの意味するところはこれである。また、反例という具体的な事例によって発展が生じてくことから、彼は自分の基本的な数学観を「準経験的」と呼ぶ。今も述べた私たちが持ちがちな数学観ではすべて論理で決まるはずであり、経験が入る余地はないように思えるのだが，そうではなく、事例と，それによる発見という形で、経験が一定の役割を果たす。

多面体についてのデカルト・オイラー予想
　「証明と論駁」というこの方法を，さらに具体例で見ていこう。ラカトシュでは 2 つのケースを用いて、「証明と論駁」以外の方法を含め、彼の考えを具体化している。なお、その記述は教師と何人かの学生の間の話し合いという形を取っている。またそれらの話し合いでいろいろな考えが打ち出されるのだが、これは例としてあげたケースが実際に数学の歴史の中で展開するときに出された考え方である。ここでは 2 つのケースの内「多面体についてのデカルト・オイラーの予想」と呼ばれるものを見ていこう。
　「多面体」とは何か。実は厳密にいうと何が多面体かということさえも、デカルト・オイラー予想についての数学史の中で変化していった。そこでここでは常識的なものとして、広辞苑の定義を使っておこう。するとそれは

４つ以上の平面多角形で囲まれた立体（広辞苑）

　ということになる。たとえばさいころは、四角形が 6 つからなっている立体で，6 面体であり、昔使われていた牛乳のパックのような，三角形が 4 つからなっている立体は、4 面体ということになる。
　多面体についてのデカルト・オイラー予想とは、
　F: Face。多面体を構成する面、
　V: Vertices。頂点，多面体の 3 つ以上の面の交わる点（広辞苑）、もっと砕いていえば多面体という立体の角，
　E: Edge。辺，多面体の相隣る 2 つの面の交わる線分、稜（広辞苑）、

　としたときに、この 3 つの間に
V -E + F = 2
　という関係が成り立つだろう、というものだ。たとえば 6 面体なら

V = 8
E = 12
F = 6
なので
8 - 12 + 6 = 2
　となり、正しい。あるいは 4 面体なら
V = 4
E = 6
F = 4
　で
4 - 6 + 4 = 2
　であり、これも正しい。他にも当てはまるものは多く、ここまでのところで、「デカルト・オイラー予想」は成り立っている。上に述べた「補題組み込み法」、ないし「証明と論駁の方法」では、ここまでが第 1 段階、「原始的推測」である。
　第 2 段階はこれが一般的に正しいことを示すために証明しなければならない。その証明方はいろいろあるようだが、ラカトシュの中で代表的に使われているのはコーシー(Cauchy)が 1813 年に発表したやり方（ラカトシュ、1980, p.10）である。これは次のような「思考実験」（同上、p.8）による。

第 1 段階
　多面体が、表面は薄いゴムでできていて、中は中空だとする。その面の一つを切り取る。残りの面を破らずに、平らにのばしてみる。ゴムだから、面の形や辺は変形してしまうかもしれないが、これは可能だ。すると、ネットワークのような形になる。さいころのような 6 面体の場合には、Fig.1（以下、図はいずれも Lakatos 1976 より）に示したような形になる。
　ここで、もともとの多面体で V - E + F = 2 だったとすると、このネットワークのような形では、F、面を一つ取り除いただけで、V,E の数は変わらないから、

　V - E + F = 1 となる。

　逆に、このネットワーク上の形で V - E + F = 1 であれば、面を一つ足したもともとの多面体では V - E + F = 2 となるだろう。

第 2 段階
　このネットワーク状の形を構成する多角形を、3 角形へと分割していく。構成する多角形に対角線を引くことで可能になる。なお、ゴム状の物体なので、多角形の辺は直線とは限らないし、対角線も直線とは限らないことに注意したい。6 面体の場合は単純で、Fig.2 のように構成する 4 角形をそれぞれ 1 本の対角線で、2 つの 3 角形へ分割する。
　まず 1 本対角線を引くと、面、F が 1 増える。対角線自体、辺だから、辺、E も 1 増える。すると

　V - E + F は変わらず。したがって第 1 段階で V - E + F = 1 だったとしたら、ここでも V - E + F = 1 のままである。逆に、ここで V - E + F = 1 ならば、第 1 段階でも V - E + F = 1 となるはず。

　6 面体以外の場合にはすべてが 3 角形となるようにこれを繰り返していくが、そこでもこの事情

は変わらない。

第 3 段階

すべて 3 角形となったこのネットワーク状の形から、3 角形を一つずつ取り除いていく。このときやり方として、2 つある。

a,　1 つの辺を取り除く（Fig.3a）。

1 つの辺を除くと E が 1 減る。それで 1 つの 3 角形という 1 つの面が減るので、F も一つ減る。従って、V - E + F は変わらない。

b,　2 つの辺と 1 つの頂点を取り除く（Fig.3b。黒い 3 角形を取り除く場合）。

V が 1,E が 2,F が 1 減るので、V - E + F は変わらない。

従って、どちらの場合でも、

第 2 段階で V - E + F = 1 だったとしたら、ここでも V - E + F = 1 のままである。逆に、ここで V - E + F = 1 ならば、第 1 段階でも V - E + F = 1 となるはず。

さて、この手続きを繰り返していくと、最後に 1 つ 3 角形が残る。3 角形では

V = 3

E = 3

F = 1

なので、

V - E + F = 1

これを遡っていけば、第２段階で V - E + F = 1。第 1 段階でも V - E + F = 1。ということは、第 1 段階で 1 つの面を取る前のもともとの多角形では V - E + F = 2、ということで、証明された。これが、「証明と論駁」の方法の第２段階、「証明」である。

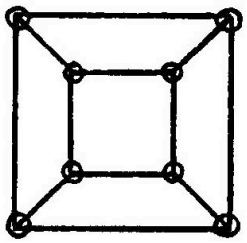


Fig. 1.

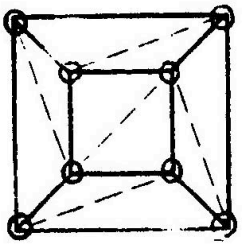
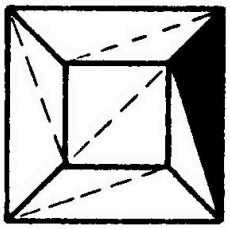
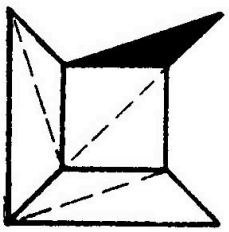


Fig. 2.



(a)

Fig. 3.



(b)

このようにひとまずデカルト・オイラー予想は証明され、定理となった。ところがこれに対する反例、つまり多面体なのに V - E + F = 2 とならない立体があることが明らかになる。たとえば Fig.4 に示す「額縁」がそれだ。

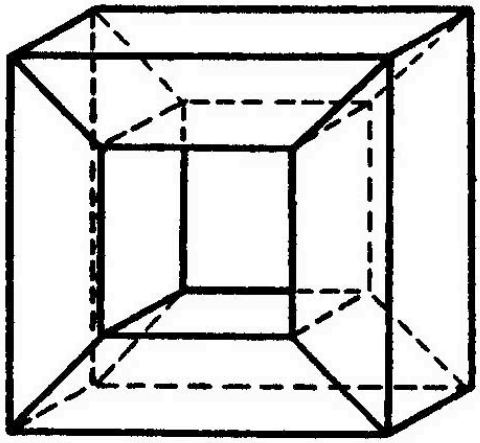


Fig.4

私たちが多面体というとまず思い浮かべるものとはだいぶ違うが、これも多角形が4つ以上集まり、囲むことでできているので、多面体に違いない。この場合、
V=16
E=32
F=16
　であり、
V - E + F = 0

となり、デカルト・オイラー予想は成り立たない。これが上の「証明と論駁の方法」の第３段階「大局的反例の出現」となる。なおここでこの反例を「大局的」というのは、とりあえずはこの反例がオイラー予想全体に対する反例であるということを意味する。

このように反例がでてきたので、もしも数学が正しいか誤っているかのどちらかを決めて終わるようなものだとすれば、デカルト・オイラー予想はここで誤りということが分かったので終わりということになる。だが、ラカトシュによれば実際の数学史ではそうはならない。ここで「証明と論駁の方法」の第 4 段階「証明再検討」がおこなわれる。上で見た証明を改めて検討してみよう。

そこには 3 つの段階があった。その 3 つを改めて取りだし、やや言い直してみよう。たとえば第１段階は「多面体が、表面は薄いゴムでできていて、中は中空だとする。その面の一つを切り取る。残りの面を破らずに、平らにのばしてみる。ゴムだから、面の形や辺は変形してしまうかもしれないが、これは可能だ」だった。これを、

a,「多面体が、表面は薄いゴムでできていて、中は中空だとする。その面の一つを切り取る。残りの面を破らずに、平らにのばしてみる。ゴムだから、面の形や辺は変形してしまうかもしれないが、これが可能だとする」と直してみる。

第 2 段階は、「このネットワーク状の形を構成する多角形を、3 角形へと分割していく」というものだった。これを、

b,「このネットワーク状の形を構成する多角形を、3 角形へと分割していくことが可能だとする」としてみる。

さらに第 3 段階は「すべて 3 角形となったこのネットワーク状の形から、3 角形を一つずつ取り除いていく」だったが、これを

c,「すべて 3 角形となったこのネットワーク状の形から、3 角形を一つずつ取り除いていくことが可能だとする」とする。

このように書き直すと、この証明の中に 3 つの条件があり、先ほど証明が可能だとしたのは、この 3 つの条件が満たされていたからだということが明らかになる。このような証明を構成する部分を、「補題」Lemma と呼ぶ。

ここで額縁の例に戻ると、額縁の場合にデカルト・オイラー予想が成り立たないのは、a,つまり第 1 補題が成り立たないからだ。額縁のどの 1 面を取り去っても、残りを変形して重なりがないように平らにのばすことはできない。1 つの面を取り除いた残りを平面上に延ばせるのは、球に膨らませることができる多面体のみで、額縁はそれができないのだ。

先に「証明と論駁」の方法の第 4 段階で述べた「有罪補題」とは、このように、それが原因で推測が成り立たなくなってしまう補題のことをいう。また、額縁事例が反証となるのはこの補題に対してだからなので、この状態を先の「大局的反証」と対比させて「局所的反証」と呼ぶ。このように問題ある補題がわかったので、今度はその補題を「原始的推測の中に条件として組み込」めば、推測を改良して、別の正しい定理を発見することができる。この場合には、1 つの面を取り除いた残りが平面上に延ばせる多面体を「単純多面体」とし、推測を

「多面体ではデカルト・オイラー予想が成り立つ」から
「単純多面体ではデカルト・オイラー予想が成り立つ」

へ変化させると、新しい定理がそこに生まれる。これは、額縁によっては反証されない。額縁は「単純多面体」ではないからだ。なおこうやって見ると、「単純多面体」は最初の素朴な「多面体」から「額縁」(等）を排除し、狭くしただけのように見えるが、ラカトシュによるとそうではない。「1 つの面を取り除いた残りが平面上に延ばせる」多面体とは、たとえば曲がった面をもち、しわくちゃの曲線多面体をも包含する(同上、108,109)。これは、素朴に多面体を考えていたときには、つまりコーシー以前にはまったく考えられていなかったもので、ここに概念の拡張、一般化があることがわかる。なお、上で述べた「証明と論駁」の第 4 段階で、「証明生成概念」という言葉が使われていたが、ここに見たように証明の検討を通して生成された新しい「単純多面体」という概念がたとえばそれである[4]。

---

[4] 、塚本(2002)によれば、ここでラカトシュが提唱した「証明と論駁」(塚本の中では「証明と反駁」と訳されている）の方法はあくまでも 19 世紀の数学史にのみ当てはまるもので、それ以降には当てはまらず、ラカトシュ自身晩年にわずかに示された数学哲学の仕事の中では「準経験主義」の立場からそれと対立する「形式主義」へと立場を変えた、とする論者もいるようだ。だが塚本はその晩年の、「数学的リサーチ・プログラムの方法論」の立場も、やはり「証明と論駁」の方法を基盤とすると論じている。ここでもそれに従い、「証明と論駁」の方法を、数学の発展に取り普遍的な重要性を持つと考える。

5,ラカトシュと私たちの考え

このようにラカトシュにとっての数学的探求におけるジグザグとは、古い定理に対する反証を通して新しい定理が生まれてくることをいう。古い定理は、反証によって一度誤りということになる。しかしそこで捨てられるのではない。その反証が、証明の過程を反省させ、その証明に気がつかなかった補題、つまり条件があることを明らかにした。明確化したその条件を変えることで、新しい定理が生まれ、反例は反例でなくなる。

この過程は、私たちの対話的な授業論における、誤りから新しい問いが生まれ得るという考えと非常に近いものをはらんでいるように思われる。我々のその考えは、ガダマー(1960)の「問いと答えの弁証法」によって裏付けられるものだった。ガダマーによれば、問いにはつねにその地平がある。地平とは問いの角度であり、問いに際して前提としているところだ。すると、教師の問いに対する子どもの誤答は、子どもが教師とは違う地平、前提を持っていたことによる可能性がある。その、教師の持つものとは違う地平、前提からは、その誤答が実は正しい場合がある。言い替えれば、子どもの中には教師が持っていたのとは違う地平をもった問い、教師が知らなかった新しい地平をもった問いがある可能性がある。教師がそれに気づき、それを明確にすることで、新しい問いがはっきりとし、対話が生じていく。これが、私たちの対話的授業論の重要な一部だ。

この私たちの考えとラカトシュのそれの重要な一致点は、誤り、誤答がそこに存在したが気がつかれていなかったある前提条件を明らかにし、それによって新しい考え方が生まれてくる、ということだ。

そのことは、ラカトシュのものをちょっと言い替えてみるとよりはっきりするだろう。最初にあるのは、原始的推測だが、つまりそれは「こうこうではないか？」という問いだ。「多面体ではデカルト・オイラー予想が成り立つのではないか？」という問いだ。それに対して、まずは証明が発見され、「成り立つ」という答えが正解であることになった。ところが次に反証が発見され、「成り立つ」という答えは一度誤答になった。だがそこで、「多面体ではデカルト・オイラー予想は成り立つ」という誤答を捨てるのではなく、それをきっかけに検討してみた。すると、この問いの中に「1 つの面を取り除いた残りが平面上に延ばせる単純多面体」がここでいう多面体なのだ、という前提が隠れていることが分かり、それを表に出し、問いを「単純多面体ではデカルト・オイラー予想は成り立つか？」と変えてみた。するとそれは正しいということになった。新しい問いが発見された。

ただしこの事例でいうと、発見されたのは「単純多面体ではデカルト・オイラー予想が成り立つ」という命題で、元の「多面体ではデカルト・オイラー予想が成り立つ」という命題をより限定し、厳密にしたものだ。より狭く、より正しい形にした、ともいえる。とすると、はたしてこの変化を、新しい「問いの発見」といっていいだろうか。問いの発見とは、新しく探求する場の出現だが、ここで生じているのは一歩「真理」へ近づいたということではないのか。

この事例ではそうもいえるかもしれない。だがラカトシュの「証明と論駁の方法」はより一般的には新しい探求の場の発見につながるものらしい。

先に「証明と論駁の方法」を紹介したが、そこでは 4 つの段階があった。ところが、実はその先がある。第 5 段階から、第 7 段階まであるのだ。それを見てみよう（ラカトシュ、1980,p.155）。

第 5 段階：新しく見つけられた補題や新しい証明生成概念が他の定理の証明の中にも出てくるかどうか検討される。この概念は異なる証明の交叉するところに見いだされ、したがって基本的重要性を持つものとして現れてくる可能性がある。

第 6 段階：今は論駁された原推測のこれまで受け入れられていた帰結が点検される。

第 7 段階：反例が新しい例に転化される。新しい研究分野が開かれる。

とこのように、証明と論駁の方法は、最終的には「新しい研究分野」、新しい探求の場を開くというのだ。このように見ると、ラカトシュのこの考えは、誤りを通して、元の問いの中の隠れた前提が発見され、新しい、知られなかった問いが出現していくという点で、私たちの unknown question の考えと非常に近いものを持っているといえるのではないだろうか。

なお、第 5 段階で出た「証明生成概念」とは、先の例でいえば「単純多面体」がそれにあたる。つまり証明をおこなっていく中で改めて生み出される概念である。ちなみに上に書いたように「単純多面体」は元の多面体という概念を限定、縮小しただけのように見える。だがラカトシュによれば、これはまた元の多面体をより拡大したものでもあるのだ（同上, p. 108）。たとえば「単純多面体」には、曲がった面をもつ、しわくちゃの、曲線多面体を含む。こんなものも多面体だとは、ただ多面体といっていたときにはまったく考えられなかった。この拡大された多面体が、新しい研究の分野を開くのだ。

6, 再びランパート

3 の最後で、ラカトシュについてのランパートの読みが足りていないのではないかと述べた。4,5 と見てくると、ラカトシュの考えはランパートの紹介から読み取れる以上に、私たちの対話的授業論の考えに近いのではないかと思われてくる。そこで最後にもう一度、私たちなりのラカトシュ理解を踏まえて、ランパートを見直してみよう。今度は彼女の授業についてみていこう。

ランパートの論文の中で紹介されている彼女の授業は 5 年生で指数を扱う。指数は大きな量を扱うために強力な道具だ。特に指数を足したりひいたりすることで、数をかけたり割ったりすることができる。これについて、まず 1^2 から 100^2 で、答えの中にパターンを探させる。すると答えの 1 の位が規則的に変化することがわかる。これを用いると、2 乗以外でも 1 の位がどうなるか、決定することができる。以下、この知識を使って、いろいろな指数の場合に実際に計算しなくても 1 の位を推測できるかどうかが問題となる。

次に 5^4,6^4,7^4 のそれぞれで 1 の位がどうなるかが問われる。計算すれば簡単だが、それをしないで推測を証明することが求められる。計算をしないで推測するための方略を求めることは、数学的にも重要だし、指数がどう働くのか、それとかけ算の違いについて考えさせることができる。

このなかでまず 5^4 から「誰かこれについての理論は？」というランパートの発問で授業が始まった。議論を経て、子どもたちは 1 の位が 5 に“ならなければならない”という結論に達した。そこでさらに 5 の 5 乗以上の場合にも最後の 2 桁が 25 になることが電卓を用いてまず発見され、それがさらになぜそうなるのか、議論された。

この事例について、ランパートはここに電卓での計算という観察からの帰納的な仮説の形成とかけ算のアルゴリズムを用いた演繹的な議論の間にジグザグがあったとコメントしている。ラカトシュのジグザグが事例レベルでの観察と演繹的な一般化の間でおこるものとしてランパートが捉えていることがここからも明らかである。

ただ、私たちがラカトシュと共通するものとして捉えている「誤り」、あるいは反例と、その中にある正しさ、という観点を、ランパートがまったく捉えていないわけではない。それは、ちょっと跳ぶことになるが、7^4 についてのやり取りのところで見えてくる。7^4 で 1 の位はやはり計算しな

くても 1 になることが確認された後で、教師は「7 の 5 乗はどうなる？」と問うた。すると答えは 3 つ、1,9,7 と出てきたが、興味深いのは 1 と答えたアーサーの理由と、その後の展開だ(Lampart, 1990, p.50.51)。

教師：アーサー、なんで 1 だと考えるの？
アーサー：7^4 は 1 で終って、さらにもう一回 1 をかけるから。
ガー：7^4 の答えは 2,401。答えを得るためにそれを 7 でかけるから、だから 7×1。
教師：なぜ 9、サラ？
テレサ：サラは数が 49 になると考えたんだと思う。
ガー：多分彼らは 9,1,9,1,9,1 になると考えてる。
モリー：7 だって知ってる。だって 7 だから。
アブドル：7^4 は 1 で終わるから、だからそれを 7 でかければ、7 で終わる。
マーサ：それは 7。いや、8 だと思う。
サム：8 だとは思わない、というのはそれは奇数かける奇数で、それはいつも奇数だから。
カール：7 だ、というのは 49×49×7 といっているようだから。
アーサー：僕はまだ 1 だと考える、というのは 7×7 で 49、それから 7^4 のためには 49×49 で、7^5 には 74 をそれとかけて、それは 1 で終わる。
教師：49^2 は？
ソーウォー：2,401
教師：アーサーの理論は、7^5 は 2,401×2,401 でなければならず、だからここが 1 でここが 1 だから。
ソーウォー：それは 2401×7。
ガー：それが 9 にならないという証明がある。9,1,9,1,になりえない。というのは 7^3 は 3 で終わるから。
マーサ：1,7,9,1,7,9 になると思う。
教師：3 で終わる 7^3 はどう？1 の位は、9×7 は 63 よ。
マーサ：あれ。
カール：アブドルは間違ってない。というのはそれでうまくいくから。彼は 1 の位に 7 をかけるといった。で、1 の位は 9 だから、3 になる。1,7,9,3,1,7,9,3 だろう。
アーサー：自分の考えを改訂したい。それは 7×7×7×7×7 だろう。私は 7×7×7×7×7×7×7×7 だと思ってた。

このように、アーサーは 7^5 を $7^4 \times 7^4$ だと思っていた。従って 7^5 の 1 の位を 1 だとしていた。7^5 の 1 の位は、という問いの背後に、$7^5=7^4 \times 7^4$ という前提があった。この展開の最後に、アーサーはその前提を $7^4 \times 7$ へと変え、7^5 の 1 の位はという問いに対して 7 と正しく答えていった。

ここでランパートが、アーサーの $7^5=7^4 \times 7^4$ という前提を、単なる誤りとして片付けていないことに注目しよう。ランパートはこれが、その前にクラスとして $7^4=7^2 \times 7^2$ を確認していたからだ、と考えている（同上、p.52）。アーサーはただ答えを求めていたのではなく、数学的な法則性を探していて、ここでの彼の推測は、ある次数の累乗の値はそれより一段低い累乗の値の平方であるというものだった。アーサーの答え自体は確かに誤りなのだが、そこにはそれなりの意味を持った前提があるのだ、とランパートは考えている。

この時点で、ランパートの考えは私たちのそれと非常に近くなっている。アーサーの誤りの中に、それとは別の場合には正しい、従ってここでももっともらしさを持つ前提が隠れていて、その前提

を理解すればアーサーの誤りは理解可能になる。言い替えれば、アーサーにとっての「7^5のときの1の位の値は？」という問いは、そういう前提を持つアーサー独自のものだった。つまり、ここには私たちにとっての unknown question が生まれていた。私たち流にいえばそういうことになる。

ただし、ここでアーサーが持っていた前提に意味があり、彼の誤答がそれなりに理解可能であるということをランパートがどれほど重要視していたかという点については不明確さがある。誤りではあるけれどもその背後にそれなりの意味ある考えがあるという事実は、ランパートのように数学的な知識だけではなく、自分たちで推論すること自体を授業で大事にするという立場からは非常に重要なはずだ。とすれば、この誤りの持つもっともらしさを子どもたちみんなで共有し、点検してみようという方向が生まれたはずだ。だがランパートはリボイシングによってアーサーの考えを明確にすることはやっていても（上記引用事例の下線部)、それ以上の展開はしない。ただし、現実の授業展開はいろいろなことから決まってくるものであり、それがある展開を取らないからといってその教師の考え方についてあまり決定的にいうことができないのはいうまでもない。

むしろ、ここではもう一つのことを吟味しておいた方がよいだろう。それは、このアーサーの問いは、ランパートにとって unknown question だったのか、言い替えれば、このアーサーの持った誤った前提は、ランパートにとって新しいものだったのか、ということだ。これについてランパートが答えているわけではなく、むろん“正解”はわからない。ただ、ある程度の一般論はいうことができるだろう。この場合、$7^5=7^4\times7^4$としてしまうような間違いを、ランパートは、というよりもむしろ経験ある教師は、既に知っているのではないか、ということだ。だとしたらこれは known question ではあっても unknown question ではないだろう。

私たちの答えはこうなる。一般論として、学習者が $7^5=7^4\times7^4$ という間違った考えを持つことがある、ということと、“アーサーが、このとき”、$7^5=7^4\times7^4$ という間違った考えを持つということは同じではない、ということだ。このときのアーサーは、そのときの彼に独自の数学についての知識を持っている。それは、このとき以外の、またアーサー以外の、ある種の学習者の数学の知識と共通性は持っているだろう。一般化すれば「学習者は $7^5=7^4\times7^4$ という間違った考えを持つ」という形でまとめることができるような知識がそこにはあるだろう。だが、それはあくまでも一般化すればであり、このときのアーサーが持っているものはそれに独特の特徴、ニュアンスを持っているはずだ。そして、“このときのアーサー”は、教師にとって初めてであう存在であり、そのときの彼に独特の特徴をもった彼の誤り方、そこにある意味ある前提は、教師にとって始めてのものだ。その意味で、アーサーの持つ問いは、教師にとって unknown なのだ。

教師のすでに持っている「学習者は $7^5=7^4\times7^4$ という間違った考えを持つことがある」という知識は、教師がアーサーの知識の状態を理解するのを助けるだろう。だが、「学習者は $7^5=7^4\times7^4$ という間違った考えを持つことがある」という一般性を超えた、“そのときのアーサー”に独特の特徴やニュアンスが、つねに明確化できるとは限らないだろう。その場合、unknown question は発見されないことになる。しかし発見できないにしても、教師はつねにこのときのアーサーに独特の、教師にとっての新しさの発見を求めて、アーサーに向かっていくべきなのだ。それが、対話的に学習者に向かう、ということなのだ。

文献

秋田喜代美(1995)　ランパートの研究にみる「語り合い、わかる授業」の創造. In 佐伯胖・藤田英典・佐藤学（編）(1995)学びへの誘い(pp.234-240).　東大出版会.

跡部将彦 (2014) Unknown question 概念からみた数学教育の独自性. 日本科学教育学会第 38 回大会,

課題研究「科学教育における対話性:“Unknown question”をめぐって(オーガナイザー吉岡有文)発表論文.
Gadamer, H. G. (1960) *Wahrheit und Methode: Grunzuege einer Philosohischen Hermeneutik.* Tuebingen: Mohr(Lonon: Continuum). 轡田収・巻田悦郎(訳)(2008) 真理と方法. 法政大学出版局.
Kilpatrick, J. (1987) Problem formulating: Where do good problems come from? In A.H. Schoenfeld(Ed.), *Cognitive sciences and mathematics education*(pp.123-148). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
小松孝太郎(2011)ラカトシュの可謬主義から見た数学的探究とその教育的意義–証明に焦点を当てて． 科学教育研究, vol.35(3), pp.272-286.
Lakatos, I. (1976) *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. NY: Cambridge University Press. 佐々木力（訳）（1980）数学的発見の論理-証明と論駁.
Lampert, M. (1990) When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *Americal educational research journal*, Vol. 27(1), pp. 29 - 63. 秋田喜代美（抄訳）(1995)真正の学びを創造する–数学がわかることと数学を教えること. In 佐伯胖・藤田英典・佐藤学（編）(1995)学びへの誘い． 東大出版会.
Lampert , M., & Blunk, L. (Eds.) (1998) *Talking mathematics in school : Studies of teaching and learning*. NY: Cambridge University Press
Morley, A. (1970) Mathematics as “process.” *The mathematics teacher*, Vol.66(1), pp. 39-45.
宮崎清孝（編）(2005)総合学習は思考力を育てる． 一莖書房.
宮崎清孝(2009)子どもの学び教師の学び-斎藤喜博とヴィゴツキー派教育学． 一莖書房.
Polya, G. (1954) *Induction and analogy in mathematics*. Princeton, NJ: Princeton University Press.芝垣和三雄（訳）(1959)数学における発見はいかになされるか (全 2 巻)． 丸善.
斎藤喜博(1970a) 斎藤喜博全集第 1 期第 6 巻：教授学のすすめ． 国土社.
斎藤喜博(1970ｂ) 斎藤喜博全集第 1 期第 6 巻：授業の展開． 国土社.
塚本高也(2002) 準経験主義と数学的進歩–イムレ・ラカトシュの歴史的アプローチ．思索. vol.35, pp.101-123.
綿引弘文(2005) 学校林のシートンたち(4 年)–穴あきクルミとアカネズミの発見.In 宮崎清孝（編）(2005)総合学習は思考力を育てる(pp.132-167)． 一莖書房.